Cartas de control para procesos exponenciales

Control Charts for exponential processes

*Jacqueline Ivette Santana Cruz *,*
Instituto Politécnico Nacional, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, México
jacki_2302@hotmail.com

Sofía Asunción Chávez Herrera,
Instituto Politécnico Nacional, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, México
chofis_e3101@hotmail.com

Recibido 15, octubre, 2017 Aceptado 24, enero, 2018

Resumen

Generalmente, cuando hablamos de procesos de producción, podemos notar que sus comportamientos no siempre son normales, como es el caso clásico de las cartas de control que, pretenden lograr un efectivo y eficiente control estadístico sobre un determinado proceso de producción. Sin embargo, la distribución de dichos procesos, muchas veces se considera que sus datos tienden a una distribución normal cuando no es así. En este artículo se proponen nuevas cartas de control tipo-Shewhart para procesos de producción más generales que tengan una distribución que pueda acoplarse a las necesidades reales del mercado, la distribución exponencial. En esta distribución únicamente se debe estimar el parámetro de escala y en caso de un desplazamiento del origen, también debe estimarse el parámetro de localidad. En el caso de la carta S se emplea el método delta para aproximar la distribución de la desviación estándar muestral, creando fórmulas y en caso necesario tablas para el cálculo de los límites de control.

Palabras Clave: Cartas de control, distribución exponencial, método delta

Mathematics Subject Classification (2010): 62P30.

Abstract

Generally, when we talk about production processes, we can notice that their behaviors are not always normal, as is the classic case of control charts that aim to achieve an effective and efficient statistical control over a specific production process. However, the distribution of these processes, it is often considered that their data tend to a normal distribution when it is not. In this article, new Shewhart type control charts are proposed for more general production processes that have a distribution that can be adapted to the real market needs, the exponential distribution. In this distribution, only the scale parameter must be estimated and, in the case of a displacement of the origin, the locality parameter must also be estimated. In the case of the chart S, the delta method is used to approximate the distribution of the sample standard deviation, creating formulas and, if necessary, tables for the calculation of control limits.

Keywords: Control charts, exponential distribution, delta method.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente los procesos de producción deben de estudiarse con base en su distribución real y no hacer aproximaciones o suposiciones a la normalidad de los datos, de tal forma que en esta investigación sobre las cartas de control se analizan los límites de control para las cartas $\bar{X}$-S. El

*Autor corresponsal

trabajo inicia con un planteamiento general sobre las cartas de control para una distribución normal, ya que es la utilizada en la literatura clásica. Hecho el planteamiento de las fórmulas para los límites de las cartas de control $\bar{X}$ y S bajo la política de 3σ y una distribución normal, se procede a realizar los cálculos para las distribuciones exponencial.

Con la distribución mencionada se puede apreciar que para el rango existen dificultades de cálculo, por tales razones se procede a utilizar las cartas S, en donde se pueden utilizar los resultados asintóticos por medio del método delta.

En el estudio realizado por Lagos & Vargas (2003), se menciona que la carta de control para datos individuales, presenta inconvenientes cuando se adjudica una normalidad sin tener la certeza de ello, por ejemplo, podrían tomarse decisiones equivocadas o pensar que el proceso de producción se encuentra en control estadístico, cuando en realidad no es así. Por ello, proponen una opción para utilizar transformaciones que, lleven datos a una distribución normal gracias al Sistema de Familias de Distribuciones de Johnson, misma que los datos tienen su origen, para que se le aplique la teoría tradicional de las Cartas de Control, mostrando que es una buena herramienta para lograr la normalización de datos.

2. OBJETIVOS

Modelar y calcular los límites de control para las cartas $\overline{\mathrm{X}} - S$ para determinar la variabilidad de los procesos productivos con distribución exponencial.

3. MARCO TEÓRICO

Las cartas de control son una herramienta que ayuda a encontrar la variabilidad en los procesos de producción. Por ende, todo surge a partir de los datos que se obtengan de dichos procesos para su análisis. En ciertos procesos industriales es común encontrarse con variables cuya distribución no es simétrica, por ejemplo, los tiempos de vida y algunos procesos químicos.

Los errores no deben pasar desapercibidos, Rahlm (1985), investigó el efecto de la no normalidad y los errores de medición en el diseño económico de las cartas de control $\bar{X}$, suponiendo que la característica de calidad mensurable del producto es una variable aleatoria con distribuida diferente a la normal, siendo que el proceso está sujeto a una sola causa asignable con tiempo de ocurrencia distribuido exponencialmente. Esta causa asignable cambia el proceso del estado en control al estado fuera de control. Cada una de sus observaciones implica alguna desviación del valor verdadero debido a un error de medición. Esta desviación, caracterizada por el sesgo e imprecisión, se considera una variante aleatoria distribuida normalmente. El diseño económico de las cartas $\bar{X}$ implica la determinación óptima de los parámetros de diseño; el tamaño de muestra, el intervalo de muestreo y los coeficientes de límites de control para minimizar el costo total esperado. El valor óptimo de los parámetros de diseño se obtiene utilizando una técnica de búsqueda computarizada. En consecuencia, el efecto de los parámetros de no normalidad y los errores de medición en los parámetros de diseño y en la función de costo de pérdida se explica a través de ejemplos numéricos.

En el trabajo de Yourstone, & Zimmer (1992), investigaron el diseño estadístico económico del gráfico de control de parámetros variables cuando la distribución del proceso no es normal. Asimismo, mencionan que la no normalidad tiene un efecto significativo en el rendimiento de los gráficos de control para los promedios, además, deben incluir el reconocimiento del grado de no normalidad de los datos subyacentes, ya que el rendimiento de un gráfico de control se puede juzgar por su capacidad para identificar correctamente las probabilidades de causas de variación asignables y las causas de variación en un proceso. En su artículo examinó los efectos de la no normalidad, medida por asimetría y curtosis, en el rendimiento, por lo tanto, el diseño de gráficos de control para promedios, y proporciona un método alternativo de diseño de gráficos para promedios de datos con distribuciones no normales.

Otra publicación realizada por Janacek & Meikle (1997), menciona que las cartas de control son ampliamente aceptadas y utilizadas en la industria manufacturera. Sin embargo, a menudo los conjuntos de datos que se utilizan para analizar provienen de poblaciones no normales. Por lo que proponen una modificación de los gráficos de control basados en medianas que supera los problemas de no normalidad. Estas cartas medianas mantienen el formato tradicional y tienen un poder razonable. El formato es vital ya que, si las cartas se van a usar en el taller, entonces deben ser aceptables y, al imitar la práctica aceptada, nuestras propuestas cumplen con este requisito.

Chaparro & Vargas (2000), presentan un método heurístico para la construcción de cartas de control para la media de un proceso cuando la distribución de la característica de interés no es simétrica. El método que propusieron ajusta los límites de acuerdo a la dirección de la asimetría observada en los datos y coincide con el método clásico de Shewhart bajo condiciones de simetría. Se hicieron simulaciones para compararlo con los métodos de Shewhart, Choobineh y Ballard (1987) y Bai y Choi (1995). Se encontró que el método propuesto es aconsejable cuando la distribución de la característica de interés es moderadamente asimétrica; en caso contrario el método de Bai y Choi ajusta de manera óptima los límites de control de la carta $\bar{X}$.

En general al aplicar una técnica estadística para el análisis de un conjunto de datos es necesario tener en cuenta las hipótesis que dicha técnica supone para su aplicación (Chaparro; Vargas ,2000). En el trabajo de Sim & Wong (2003), se discute la carta-R con límites de control de probabilidad asimétricos bajo el supuesto de que la distribución de la característica de calidad en estudio es exponencial, En la logística de este estudio, se examina el efecto de los límites de probabilidad estimados en el rendimiento de la tabla R, y finalmente obtener los límites de probabilidad deseados de la tabla R que tiene una tasa de falsa alarma especificada cuando los límites de probabilidad deben estimarse a partir de muestras preliminares tomadas de los procesos exponencial, logístico.

En el trabajo de investigación realizado por Gutiérrez (2006), se analizan los problemas de las cartas de control para atributos. Los problemas que describe este autor que presentan dichas cartas son: el procedimiento tradicional para obtener los límites de control tiene varias dificultades como el no incorporar la incertidumbre sobre la estimación del parámetro del modelo, el no contemplar las variaciones en el parámetro del proceso y el requerir un periodo para obtener datos. Otro problema es que los límites de control para las cartas de atributos se obtienen con el enfoque 3-sigma, que se basa en el hecho que bajo normalidad y estabilidad, la probabilidad de que los datos estén dentro de los límites de control es de 0.9973. Sin embargo, en el caso de los datos de atributos las distribuciones son sesgadas, y en consecuencia los correspondientes límites de control no reúnen tales requerimientos, es por ello que el autor resuelve estos problemas con métodos Bayesianos y en su trabajo se puede ver cómo establecer los límites de control Bayesianos para las cartas de control p, np, c y u en forma secuencial desde la primera observación. También analiza el problema de la carta p cuando se basa en un tamaño de subgrupo grande y se propone una solución Bayesiana para este problema.

En el análisis de Chen & Cheng (2007), mostraron que la no normalidad tiene un efecto significativo en los parámetros de diseño, por lo tanto, concluyeron que, no debe ignorarse. También se consideró la sensibilidad a la forma de Weibull y el cambio de media del proceso. También compararon los diseños económico-estadísticos y completamente económicos para los datos no normales.

Erto, Pallotta, & Park (2008), proponen una nueva carta de control del tipo Shewhart del percentil Weibull o mejor conocido como la vida confiable, como un ejemplo práctico de un producto obtenido siguiendo el enfoque de tecnología de datos (DT), presentada como una nueva disciplina que define una parte de la Tecnología de la información (TI). Los pasos operativos del enfoque DT están completamente explicados en este trabajo. Los resultados se ilustran mediante un ejemplo aplicativo real.

En el trabajo de investigación realizado por Leiva, Soto & Cabrera (2011) se estudian los tiempos de vida de productos expuestos a fallas mediante cartas de control de calidad, dado que los tiempos de vida generalmente siguen distribuciones asimétricas, para monitorear estos tiempos, se deben considerar cartas de control para distribuciones asimétricas, como es el caso de la distribución BS (Birnbaum-Saunders). Entonces, usando la distribución BSsum, desarrollan, implementan y aplican una nueva metodología para cartas de control basada en la distribución BS.

En el trabajo de investigación realizado por Leiva, Soto & Cabrera (2011) estudian los tiempos de vida de productos expuestos a fallas mediante cartas de control de calidad, dado que los tiempos de vida generalmente siguen distribuciones asimétricas, para monitorear estos tiempos, se deben considerar cartas de control para distribuciones asimétricas, como es el caso de la distribución BS (Birnbaum-Saunders). Entonces, usando la distribución BSsum, desarrollan, implementan y aplican una nueva metodología para cartas de control basada en la distribución BS.

En el trabajo de investigación realizado por Karagöz & Hamurkaroglu (2012), se estudiaron las distribuciones de mediciones en procesos químicos, procesos de semiconductores, procesos de desgaste de herramientas de corte y observaciones de tiempos de vida en muestras de pruebas de vida aceleradas que a menudo son sesgadas y de población no normal. En dicho trabajo, los límites de control de los gráficos de control $\overline{\mathrm{X}}$ y R para las distribuciones asimétricas se obtienen considerando los métodos de varianza clásica, la varianza ponderada (WV), las desviaciones estándar ponderadas (WSD) y la corrección de asimetría (SC). Estos métodos se comparan utilizando la simulación de Monte Carlo. Las probabilidades de riesgo de Tipo I de estos gráficos de control se comparan con respecto a los diferentes tamaños de subgrupos para distribuciones asimétricas que son Weibull, gamma y lognormal. Los resultados de la simulación muestran que el riesgo de tipo I del método SC es menor que el de otros métodos. Cuando la distribución es aproximadamente simétrica, los riesgos tipo I de los gráficos Shewhart, $\overline{\mathrm{X}}$, la varianza ponderada, las desviaciones estándar ponderadas y la corrección de asimetría, son comparables, mientras que el gráfico $SC\,\mathrm{R}$ tiene un riesgo tipo I notablemente menor.

Camelo, López & Zambrano (2014) describen en su estudio que las gráficas de control son herramientas que se utilizan para monitorear variables en procesos de calidad, donde se tienen distintas metodologías basadas en el supuesto de normalidad en los datos, pero que pueden presentar problemas cuando los supuestos no se cumplen. Ante esta situación en su trabajo estudian dos metodologías: dos gráficas de control bootstrap, propuestas por Liu, Tang y por Bajgier; la segunda, es la gráfica de control propuesta por Choobineh y Ballard basada en un método heurístico para distribuciones sesgadas, con el fin de medir la eficiencia de las gráficas de control y decidir cuál de las dos alternativas es la más conveniente y aplicarlo a un caso real.

Seif & Saniga (2015), utilizaron la distribución de Burr como un modelo de distribución de variable de calidad de procesos debido a su flexibilidad en términos para poder modelar muchas distribuciones, incluida la normal. Ilustraron el procedimiento de diseño y realizaron un análisis de sensibilidad sobre los parámetros del proceso y costo en función de los grados de asimetría y curtosis de la población mediante una aplicación industrial. Por otro lado, mencionan que el diseño económico de cartas de control, debe especificarse la distribución de las características de calidad y el mecanismo de distribución de fallas o el modelo de choque.

En el trabajo de investigación realizado por Kuber & Tukaram (2015), se analiza la representación de reglas de ejecución de un gráfico de control sintético no paramétrico utilizando estadística de signos para detectar cambios en el parámetro de ubicación. Comparan el tiempo promedio de estado cero con el tiempo promedio de estado estable para señalizar la tabla de control sintético para distribuciones simétricas y asimétricas. También presentan la carta de control *m* de *m* mediante estadística de signos. Para el estudio comparativo, calculan el tiempo promedio para señalizar la carta de control de *m* de *m*, la carta de signos (carta 1-de-1) y la carta de control sintética para distribuciones normales, Cauchy, exponencial doble y gamma. Estado estable y rendimiento de estado cero de la carta de control de *m* de *m* con m = 2, 3 en comparación con la carta de signos (carta 1-de-1) y la carta de control sintética. El tiempo promedio de estado cero y de estado estacionario para la señal de las cartas de control sintéticas y de *m*-de-*m* calculados usando el enfoque de cadena de Markov.

Antes de analizar la distribución de los datos Shper & Adler (2017), consideran que el orden de los datos es importante. Proponen una nueva prueba de aleatoriedad de datos estadísticos, dando un modelo inicial de la estimación de su funcionabilidad sugiriendo la atención en el problema de la aleatoriedad de los datos. Por lo tanto, ellos revisaron el papel de la sucesión de datos en la aplicación correcta del gráfico de control tipo Shewhart simple con la esperanza de llamar la atención de la comunidad estadística sobre este problema que puede afectar muchos otros puntos del control del proceso estadístico (Shper; Adler, 2017). Además, mencionan que para que la aplicación de los gráficos de control tenga sentido, el proceso debe contar con la suficiente estabilidad que, aun siendo aleatorio, permita su predicción. Generalmente, un proceso caótico no se puede controlar, por ende, no es predecible. A los procesos antes mencionados, no se les puede aplicar el gráfico de control y será irrelevante hablar de capacidad. Por eso se debe estudiar con herramientas estadísticas avanzadas que permitan conocer las causas de la estabilidad y se erradiquen.

Por su parte, en la investigación de Heydari & Moghadam (2017), consideraron tres parámetros de diseño, es decir, el tamaño de muestra, el intervalo de muestreo y el coeficiente de límites de control, desarrollaron un caso de no normalidad con un esquema de muestreo no uniforme. Sus resultados mostraron que los parámetros de escala y forma del modelo de choque Burr afectan significativamente el costo esperado por unidad de tiempo del ciclo de calidad. Del mismo modo, revelaron que el uso de la suposición no normal causó un tamaño de muestra más pequeño, límites de control más estrechos y un menor costo esperado por unidad de tiempo del ciclo de calidad.

Quintana, Pisani & Casal (2015) estudiaron las cartas de control en la ingeniería de mantenimiento, describen que, si bien las primeras aplicaciones de las cartas de control fueron en producción, otros diseños surgieron para adaptarse a nuevas necesidades como el monitoreo de los equipos y sistemas en el hábitat fabril. Debido a que el tiempo entre fallas suele ajustarse a un modelo Exponencial o Weibull.

Osei, Abbasi, & Riaz (2017), estudiaron gráficos de control de dispersión multivariante para detectar cambios en la matriz de covarianza de procesos bivariados normales y no normales, basados en estimaciones de dispersión, tales como la desviación estándar de la muestra (S), rango intercuartil (Q), la desviación absoluta media de la mediana (MD) y la desviación absoluta media (MAD), respectivamente. Opinan que los gráficos de control multivariable son más sensibles a la ocurrencia de variación en los procesos con dos o más variables de calidad correlacionadas que los gráficos univariados. El uso de gráficos de control univariados por separado para monitorear el proceso multivariante puede ser engañoso ya que ignora la correlación entre las características de calidad. Además, mencionan que la aplicación de gráficos de control multivariados permite el monitoreo simultáneo de las características de calidad formando un solo gráfico. Los gráficos operan bajo el supuesto de que las observaciones del proceso se distribuyen normalmente, pero en la práctica no siempre es así.

Por su parte, Saghir, Chakrabort & Ahmad (2017), mencionan que un estudio de fase I generalmente se utiliza cuando los parámetros de la población son desconocidos, y que el rendimiento de cualquier gráfico de fase II depende de la precisión de los límites de control obtenidos del análisis de fase I. El rendimiento de los gráficos de dispersión bivariados de fase I se ha investigado principalmente para la distribución normal bivariante. Sin embargo, esta suposición rara vez se cumple en la realidad. El trabajo actual desarrolla y estudia el rendimiento de la fase I | S | y | G | gráficos para monitorear la dispersión del proceso de distribuciones bivariadas no normales. Las constantes de gráficos de control necesarias se determinan para las distribuciones no normales bivariadas a la probabilidad de falsa alarma nominal. El rendimiento de estos gráficos se evalúa y compara en una situación en la que las muestras se generan por logística bivariante, bivariante Laplace, bivariante exponencial o bivariante distribución t. El análisis muestra que la consideración adecuada de la distribución bivariante subyacente en la construcción de gráficos de dispersión bivariados de fase I es muy importante para dar una imagen real del estado del proceso de entrada o salida.

Patil & Shirke, (2017) proponen un diseño económico de gráfico de signos para controlar la mediana. Como el gráfico de signos no tiene distribución, puede aplicarse fácilmente a cualquier proceso sin conocimiento previo de la distribución de la calidad del proceso. El efecto en el costo de pérdida observado para diferentes cambios en la ubicación muestra que el gráfico de signos funciona mejor para turnos grandes. El estudio de rendimiento estadístico económico revela que el rendimiento estadístico del gráfico de signos puede mejorarse lo suficiente para cambios moderados en el proceso. El estudio de sensibilidad muestra que el diseño es más sensible para el cambio en los valores del costo de pérdida de penalización y el tiempo requerido para la búsqueda y reparación de una causa asignable.

Aslam, Arif & Jun (2017), propusieron una carta de control de atributos utilizando la lógica de censura híbrida acelerada para el control de elementos defectuosos cuya vida sigue una distribución de Weibull. El resultado se prueba, introduciendo el factor de aceleración basado en diferentes condiciones presurizadas como estrés, carga, deformación, temperatura, etc. Los límites de control se derivan de la distribución binomial, pero la fracción defectuosa se expresa solo a través del parámetro de forma, el factor de aceleración y la constante de duración de la prueba. En su trabajo generaron tablas de las duraciones de ejecución promedio para diferentes parámetros de proceso para evaluar el rendimiento de la tabla de control propuesta. Se realizaron estudios de simulación para el uso práctico, donde la carta propuesta se compara con la carta Shewhart np para la demostración de la capacidad de detección de un cambio en el proceso.

4. MATERIALES Y MÉTODOS

En este apartado se desarrollan una serie de pasos para obtener los límites de control para la distribución exponencial, primero se encuentra la función generadora de momentos centrales de la distribución de estudio, después se explica cómo calcular las cartas de control $\bar{X}$ y S a través del método delta, finalmente se obtienen los parámetros de las cartas de control $\bar{X}$ y S para una distribución exponencial.

4.1 ENCONTRAR LA FUNCIÓN GENERADORA DE MOMENTOS CENTRALES DE LA DISTRIBUCIÓN DE ESTUDIO

Se calcula la función generadora de momentos centrales y a través de sus derivadas sucesivas se generaliza la función para obtener el momento central n-ésimo de la distribución exponencial.

En esta investigación se revisa la distribución exponencial con función de densidades dada en la expresión

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x, \lambda > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es conocido que la función generadora de momentos para la distribución exponencial resulta

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Comprobación:

$$m_X(t) = E[e^{tx}] = \int_0^\infty e^{tx} f(x)dx = \int_0^\infty e^{tx}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

Para la obtención de los momentos de la distribución exponencial se requiere calcular la n-ésima derivada de la función generatriz de momentos, dada en la proposición 1.

Proposición 1. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial, entonces:

$$m_X^{(n)}(t) = \frac{n!\,\lambda}{(\lambda - t)^{n+1}}$$

Evaluando en $t = 0$, resulta que la función generatriz de momentos es igual a:

$$m_X^{(n)}(t) = \frac{n!\,\lambda}{\lambda^{n+1}}$$

La comprobación se obtiene desarrollando las derivadas de $m_X^{(n)}$ y sustituyendo $t = 0$. En particular

$$m_X'(t) = \frac{-\lambda(-1)}{(\lambda - t)^2} = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$

$$m_X''(t) = \frac{-1 \times 2\lambda(-1)}{(\lambda - t)^3} = \frac{2!\,\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

$$m_X'''(t) = \frac{-2! \times 3\lambda(-1)}{(\lambda - t)^4} = \frac{3!\,\lambda}{(\lambda - t)^4}$$

$$m_X^{IV}(t) = \frac{-3! \times 4\lambda(-1)}{(\lambda - t)^5} = \frac{24\lambda}{(\lambda - t)^5}$$

Generalizando el resultado anterior, tenemos

$$m_X^{(n)}(t) = \frac{n!\,\lambda}{(\lambda - t)^{n+1}}$$

Sustituyendo $t = 0$, resulta

$$m_X^{(n)}(t) = \frac{n!\,\lambda}{\lambda^{n+1}}$$

con lo que queda demostrado.

A continuación, se presenta el desarrollo para calcular la función generadora de momentos centrales de la distribución exponencial:

$$m_{X-\mu}(t) = E\left[e^{t(x-\mu)}\right] = \int_0^\infty e^{t(x-\mu)} f(x)dx = \int_0^\infty e^{t(x-\mu)}\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx = \frac{\lambda e^{-t\mu}}{\lambda - t}$$

entonces la función generadora de momentos centrales está dada por:

$$m_{X-\mu}(t) = \frac{\lambda e^{-t\mu}}{\lambda - t}.$$

Para obtener el n-ésimo momento central $\mu_n' = \mathrm{E}((\mathrm{X} - \mu)^{\mathrm{n}})$ primero se calculan las primeras dos derivadas sucesivas de la función generadora de momentos centrales de la distribución exponencial:

$$m_{X-\mu}^{(1)}(t) = \frac{(\lambda - t)(-\lambda\mu e^{-t\mu}) - \lambda e^{-t\mu}(-1)}{(\lambda - t)^2}$$
$$= \frac{\lambda e^{-t\mu}}{(\lambda - t)^2} - \frac{\lambda\mu e^{-t\mu}}{\lambda - t}$$
$$m_{X-\mu}^{(2)}(t) = \frac{(\lambda - t)^2(-\lambda\mu e^{-t\mu}) - 2\lambda e^{-t\mu}(\lambda - t)(-1)}{(\lambda - t)^4} - \frac{(\lambda - t)(-\lambda\mu^2 e^{-t\mu}) - \lambda\mu e^{-t\mu}(-1)}{(\lambda - t)^2}$$
$$= \frac{2\lambda e^{-t\mu}}{(\lambda - t)^3} - \frac{2\lambda\mu e^{-t\mu}}{(\lambda - t)^2} + \frac{\lambda\mu^2 e^{-t\mu}}{\lambda - t}$$

Podemos observar que los momentos centrales siguen una secuencia, a medida que n aumenta se incrementa otro término, por lo tanto, el momento central n-ésimo está dado por la función:

$$m_{X-\mu}^{(n)}(t) = E[(X-\mu)^n] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \left(\frac{n!}{(n-j)!}\right) \frac{\lambda\mu^{n-j} e^{-t\mu}}{(\lambda - t)^{j+1}}.$$

Sustituyendo $\mu = \frac{1}{\lambda}$, tenemos:

$$E[(X-\mu)^n] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \left(\frac{n!}{(n-j)!}\right) \frac{\lambda \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-j} e^{-\frac{t}{\lambda}}}{(\lambda - t)^{j+1}}.$$

En particular se concluye:

$$E(X-\mu)^2 = 2\lambda - 2 + \frac{1}{\lambda}$$
$$E(X-\mu)^3 = 6\lambda - 6 + \frac{3}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}$$
$$E(X-\mu)^4 = 24\lambda - 24 + \frac{12}{\lambda} - \frac{4}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3}$$

4.2 CARTAS DE CONTROL $\bar{X}$ Y S A TRAVÉS DEL MÉTODO DELTA

Se explica el método delta para obtener la distribución asintótica de la estadística S_{n-1} para encontrar los limites de control para las cartas de control $\bar{X}$ y S.

Es conocido que las cartas de control $\bar{X}$ y S bajo 3σ trabajan con los límites dados en las expresiones siguientes:

$$LIC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{S}$$
$$LSC_{\bar{X}} = \bar{\bar{X}} - A_2\bar{S}$$
$$LIC_S = \bar{S}D_3$$
$$LSC_S = \bar{S}D_4$$

En donde, $A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$ y $d_2 = E(S)$; $D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2}$, $D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2}$ con $d_3 = \sqrt{V(S)}$.

Entonces para determinar los límites de control es necesario encontrar la distribución de la estadística S_{n-1}, para esto se obtiene una distribución asintótica por medio del método delta para calcular el valor esperado y la desviación estándar de S_{n-1}.

Las distribuciones de S_{n-1}^2 y S_{n-1} están en Sen and Singer 1993, el Ejemplo 3.4.1 páginas 126 y 127 trata sobre la distribución de S_{n-1}^2 y el ejemplo 3.4.3 página 132 sobre la distribución de S_{n-1}, los resultados se resumen en el Teorema 1.

Teorema 1. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables iid con media μ y varianza σ^2, además $\mathrm{E}(X_\mathrm{i}^4) < \infty$ y denotando $\mathrm{E}((X_\mathrm{i}-\mu)^4) = \mu_4 < \infty$ y $\mathrm{Var}((X_\mathrm{i}-\mu)^2) = \mu_4 - \sigma^4 = \gamma^2$, entonces:

$$S_{n-1}^2 \vec{D} N\left(\sigma^2, \frac{\gamma^2}{n}\right) \text{ y } S_{n-1} \vec{D} N\left(\sigma, \frac{\gamma^2}{4\sigma^2 n}\right)$$

Luego resulta:

$$E(S_{n-1}) = \sigma \text{ y } V(S_{n-1}) = \frac{\gamma^2}{4\sigma^2 n}.$$

4.3 CARTAS DE CONTROL $\bar{X}$ Y S PARA UNA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Se encuentran los parámetros de los límites de control para las cartas de control $\bar{X}$ y S para la distribución exponencial.

Para las cartas de control $\bar{X}$ y S se requiere encontrar las expresiones para una distribución exponencial, se obtiene

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{y} \quad \mu_4 = 24\lambda - 24 + \frac{12}{\lambda} - \frac{4}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3}$$

de donde

$$\gamma^2 = 24\lambda - 24 + \frac{12}{\lambda} - \frac{4}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^4}.$$

Por lo tanto, en el caso de la distribución exponencial las distribuciones asintóticas de S_{n-1}^2 y S_{n-1}, se obtienen sustituyendo los valores para σ^2 y γ^2:

$$S_{n-1}^2 \vec{D} N\left(\frac{1}{\lambda^2}, \frac{24\lambda^5 - 24\lambda^4 + 12\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 1}{\lambda^4 n}\right)$$

$$S_{n-1} \overrightarrow{D} N\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{24\lambda^5 - 24\lambda^4 + 12\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 1}{4\lambda^2 n}\right)$$

Los límites de las cartas de control para $\bar{X}$ y S, en el caso de la distribución exponencial están dados por:

$$d_2 = E(S) = \frac{1}{\lambda}$$

$$d_3 = \sqrt{V(S)} = \sqrt{\frac{24\lambda^5 - 24\lambda^4 + 12\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 1}{4\lambda^2 n}}$$

De donde

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}} = \frac{3\lambda}{\sqrt{n}}$$

$$D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2} = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{24\lambda^5 - 24\lambda^4 + 12\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 1}{n}}$$

$$D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{24\lambda^5 - 24\lambda^4 + 12\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 1}{n}}$$

5. RESULTADOS

En la Tabla 1 se muestran los valores para calcular los límites de las cartas de control $\bar{X}$ y S para tamaños de muestra $n = 5, 10, 15, 20, 25$ y 30 y un valor respectivo de $\lambda = 1.5$.

Tabla 1. Valores para los límites de las cartas de control $\bar{X}$ y S para la distribución exponencial, $\lambda = 1.5$.

n	d3	A2	D3	D4
5	1.4357	2.0125	-5.4605	7.4605
10	1.0152	1.4230	-3.5682	5.5682
15	0.8289	1.1619	-2.7299	4.7299
20	0.7178	1.0062	-2.2302	4.2302
25	0.6420	0.9000	-1.8892	3.8892
30	0.5861	0.8216	-1.6375	3.6375

6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este artículo se mostró como calcular los límites de control para la $\bar{X}$ y S de la distribución exponencial, para ello se encontraron las funciones generadoras de momentos y de momentos centrales de la distribución exponencial con el fin de obtener a través de las mismas los parámetros de la distribución de S_{n-1}, es decir, la media y la varianza necesarios para calcular los límites de control. De esta manera cuando el comportamiento de un proceso siga una distribución exponencial se pueden aplicar las cartas de control para la $\bar{X}$ y S utilizando las expresiones que se encontraron en la sección 4 (A_2, D_2 y D_3) y analizar el comportamiento del mismo.

7. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Una gran variedad de procesos en las industrias no tienen una distribución simétrica, es decir, no son normales por lo que es indispensable encontrar cartas de control para procesos no normales, como lo es el caso de este trabajo en el que se encontraron las cartas de control para la $\bar{X}$ y S de la distribución exponencial, así como se encontraron las cartas de control para esta distribución se podrían encontrar cartas de control para otros tipos de distribuciones diferentes a la normal para analizar algunos los procesos industriales.

8. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la SIP-IPN por el apoyo bridado al proyecto 20170668, del que se deriva este artículo. También agradecen el apoyo de las LGAC-2 de la Maestría en Ingeniería Industrial y la LGAC-2 de la Maestría en Administración de la SEPI-UPIICSA-IPN, ya que a través de los Seminarios de Investigación es como surgieron las inquietudes de esta investigación. Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico brindado para la realización de nuestros estudios de posgrado. Finalmente, los autores agradecemos a los árbitros anónimos por sus críticas constructivistas que hicieron un mejor trabajo de investigación.

9. REFERENCIAS

Aslam, M., Arif, O., & Jun, C. (2017). An attribute control chart for a Weibull distribution under accelerated hybrid censoring. *PLOS ONE*, *12(3), 1-11.*

Camelo, C., López, H., & Zambrano, A. (2014). Eficiencia de los gráficos de control bajo supuestos de no normalidad. *Cuadernos de Estadística Aplicada*, *1(1),* 39-58.

Chaparro, E., & Vargas, J. (2000). Gráficos de control para la media de un proceso en poblaciones con distribución asimétrica. *Revista Colombiana de Estadística*, *23*(2), 29–45.

Chen, H., & Cheng, Y. (2007). Non-normality effects on the economic–statistical design of charts with Weibull in-control time. *European Journal of Operational Research*, *176*(2), 986-998.

Erto, P., Pallotta, G., & Park, S. H. (2008). An example of data technology product: a control chart for Weibull processes. *International Statistical Review*, *76*(2), 157-166.

Gutiérrez, H. (2006). Cartas de control Bayesianas para atributos y el tamaño de subgrupo grande en la carta *p*. *Revista Colombiana de Estadística*, *29(2),* 163-180.

Heydari, A. A., & Moghadam, M. B. (2017). Non-normality Effects on the Economic Statistical Design of $\bar{X}$ Control Charts Under Burr XII Shock Models. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 1-13.

Janacek, G. J., & Meikle, S. E. (1997). Control charts based on medians. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, *46*(1), 19-31.

Karagöz, D., & Hamurkaroglu, C. (2012). Control Charts for Skewed Distributions : Weibull, Gamma, and Lognormal. *Metodoloski Zvezki*, *9*(2), 95–106.

Kuber, S., Tukaram, D. (2015). Steady-state behavior of nonparametric control charts using sign statistic. *Production*, *25 (4),* 739-749.

Lagos, I., & Vargas, J. (2003). Sistema de familias de distribuciones de Johnson, una Alternativa para el manejo de datos no normales en cartas de control. *Revista Colombiana de Estadística*, *26*(1), 25–40.

Leiva, V., Soto, G., Cabrera, E., & Cabrera, G. (2011). Nuevas cartas de control basadas en la distribución Birnbaum-Saunders y su implementación. *Revista Colombiana de Estadística*, *34*(1), 147–176.

Osei-Aning, R., Abbasi, S. A., & Riaz, M. (2017). Bivariate Dispersion Control Charts for Monitoring Non-Normal Processes. *Quality and Reliability Engineering International*, *33*(3), 515-529.

Patil, S. H., & Shirke, D. T. (2017). Economic design of non parametric sign control chart. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, *46*(18), 8987-8998.

Quintana, A., Pisani, M., & Casal, R. (2015). Desempeño de cartas de control estadístico con límites bilaterales de probabilidad para monitorear procesos Weibull en mantenimiento. *Ingeniería. Investigación y Tecnología*, *XVI*(1), 143–156.

Rahlm, M. A. (1985). Economic model of *X*-chart under non-normality and measurement errors. *Computers & operations research*, *12*(3), 291-299.

Saghir, A., Chakraborti, S., & Ahmad, I. (2017). On the Performance of Phase-I Bivariate Dispersion Charts to Non-Normality. *Quality and Reliability Engineering International*, *33*(3), 637-656.

Seif, A., Faraz, A., & Saniga, E. (2015). Economic statistical design of the VP control charts for monitoring a process under non-normality. *International Journal of Production Research*, *53*(14), 4218-4230.

Sim, C. H., & Wong, W. K. (2003). R-charts for the exponential, Laplace and logistic processes. *Statistical Papers*, *44*(4), 535-554.

Shper, V., & Adler, Y. (2017). The importance of time order with Shewhart control charts. *Quality and Reliability Engineering International*, *33*(6), 1169-1177.

Yourstone, S. A., & Zimmer, W. J. (1992). Non-normality and the design of control charts for averages. *Decision sciences*, *23*(5), 1099-1113.

Este artículo puede citarse de la siguiente forma:

Citación estilo APA sexta edición

Santana Cruz, J.I. & Chávez Herrera, S.A. (septiembre-diciembre de 2017). Cartas de control para procesos exponenciales. *Revista Multidisciplinaria de Avances de Investigación*, 3(3), 21-32.

Citación estilo Chicago decimoquinta edición

Santana-Cruz, Jacqueline Ivette & Chávez-Herrera, Sofía Asunción. Cartas de control para procesos exponenciales. *Revista Multidisciplinaria de Avances de Investigación*, 3 No. 3 (septiembre-diciembre de 2017): 21-32.

Citación estilo Harvard Anglia

Santana Cruz, J.I. & Chávez Herrera, S.A., 2017. Cartas de control para procesos exponenciales. *Revista Multidisciplinaria de Avances de Investigación*, septiembre-diciembre, 3(3), pp. 21-32.

Citación estilo IEEE

[1] J.I. Santana-Cruz y S.A.. Chávez-Herrera. Cartas de control para procesos exponenciales. *Revista Multidisciplinaria de Avances de Investigación*, vol. 3 No. 3, pp. 21-32, septiembre-diciembre de 2017.